ENIG

**FILTRAGE OPTIMAL** G E A 2

2020-2021

Plan

***I. Introduction générale***

**II. Observateur d’état des systèmes linéaires *III.Filtrage de Wiener***

***IV. Filtrage de Kalman***

***V. Applications du filtrage de Kalman***

3

Chapitre 1

Introduction générale

I.1. Processus

Un processus ?système physique temps

continu discret

Influences internes et externes

***perturbations***

*entrées sorties*

*Sortie : variable mesurable caractéristique de l’évolution du système Entrée : variable d’origine externe susceptible d’influencer l’évolution du système*

***Un processus est un système physique qui évolue au cours du temps sous l’effet de diverses influences internes et externes.***

5

I.2. Processus continu

Un processus est dit **continu** si les **grandeurs** qui le caractérisent sont de nature **continues**.

L’évolution au cours du temps est décrite par des signaux **continus au sens mathématique du terme**.

Le **processus continu** peut être

caractérisé par un ensemble **d’équations différentielles et algébriques** de la forme:

*t* ∈*R x*∈*R*

*n*

temps état

( )

*x f x u t p*

*u*∈*R*

*l*

commande

 =

, , ,

*y*∈*R*

*m*

sortie

*y h*(*x u t p*)

*p*∈*R*

*n*

perturbation

=

, , ,

*f* (.) *h*(.)

fonction d’évolution fonction de sortie6

I.2. Processus continu

Si les signaux ou les variables intervenant dans la description du processus sont des **fonction du temps alors ils sont :**

▪ **déterministes** si leurs valeurs sont **parfaitement définis** à chaque instant

▪ **aléatoires** si seul leurs probabilités d’avoir une amplitude sont définies à chaque instant (cas des signaux bruités)

7

I.2.1. Processus continu linéaire

Processus **linéaire**

?

Il valide le principe de superposition :

∀*i*∈{1,,*k*}*(t)* Si l’entrée *ui(t)* provoque la sortie *yi*

*k*

=∑ *i i*∈

alors provoque *u t u tiR*

( ) α ( ), α

*k*

∑

*y t y t* ( ) α ( )

=

*i i*

*i*

=

1

*i*

=

1

Processus **continu linéaire non bruité**

 = +

*x t A t x t B t u t*

( ) ( ). ( ) ( ) ( )

*y t C t x t D t u t*

( ) ( ). ( ) ( ) ( )

= +

Processus continu linéaire **stationnaire**

*A*(*t*) = *A*, *B*(*t*) = *B*,*C*(*t*) = *C*, *D*(*t*) = *D*

8

I.3. Processus discret

Un processus est dit **discret** si l’évolution et/ou l’observation des grandeurs qui le caractérisent ne peut se faire qu’à des **instants particuliers**.

systèmes échantillonnés

systèmes logiques séquentielle

Le processus **discret** peut être

caractérisé par un ensemble de **relations récurrentes** de la forme:

*tk*∈*Rn xk*∈*R*

temps

état à l’instant *tk*

( )

*x f x u t p*

*uk*∈*R*

*l*

commande à l’instant *tk*

=

, , ,

*yk*∈*R*

*m*

sortie à l’instant *tk*

*k k k k k*

+

1

( ) *k k k k k y h x u t p*

+

1

=

, , ,

*pk*∈*R f* (.)

*h*(.)

perturbation à l’instant *tk n*

fonction d’évolution

fonction de sortie

9

I.3.1. Processus discret linéaire

Processus **linéaire**

Il valide le principe de superposition :

∀*i*∈{1,,*m*}*)* Si l’entrée *ui(tk)* provoque la sortie *yi(tk*

*m*

=∑ *i i k*∈

alors provoque *u t u tiR*

( ) α ( ), α

*m*

∑

*y t y t* ( ) α ( )

=

*i i k*

*i*

=

1

*i*

=

1

Processus **discret linéaire non bruité**

*x A x B u*

+= +

. .

*k k k k k*

1

*y C x D u*

= +

. .

*k k k k k*

Processus discret linéaire **stationnaire**

*Ak*= *A*, *Bk*= *B*,*Ck*=*C*, *Dk*= *D*

10

I.4. Commande d’un processus

Commander? Imposer un comportement souhaité régulation et asservissement

*perturbations*

*consigne sorties*

*Système de commande*

*Système à*

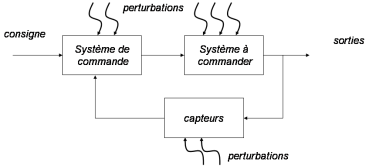
*commander*

*~~capteurs~~*

*perturbations*

11

I.4.1. Système de commande

Le système de commande utilise 

des variables internes, donc

l’**estimation** et le filtrage en vue

de générer ou de donner une

estimation des informations

manquantes

L’**estimation** peut être:

⮚l’**observation** qui a pour but l’estimation des variables dans un cadre **déterministe**

⮚Le **filtrage** qui a pour but l’estimation des variables dans un cadre **stochastique**

12

I.5. Le filtrage

**Filtrer** ? Mettre en forme un signal

Éliminer le bruit superposé au signal utile

Avec l’utilisation de plus en plus de calculateurs numérique dans la chaîne de commande, le filtrage est devenu un **outil fondamental**.

**Shanon** a montré la nécessité d’un **filtrage préalable à tout traitement numérique** pour garantir l’équivalence analogique - numérique

13

Filtrage de Wiener et Kalman

Point de vue d’Automatique, l’objectif est de **déterminer des estimateurs** des variables du système lorsque l’**environnement** présente des **perturbations aléatoires**

Déterminer un système (**filtre**), **optimal** au sens de la **minimisation de la variance d’erreur** entre la variable réelle et son estimation

Wiener: approche fréquentielle Kalman: approche temporelle

14

Chapitre 2

Observateur d’état des systèmes linéaires

Chapitre 3

Filtrage de Wiener

I. Filtrage de Wiener

La méthode de Wiener permet de déterminer la fonction de transfert du filtre qui reconstitue un signal *x(t)* à partir d’une mesure *y(t)* entachée d’un bruit *b(t)*

*b*(*t*)

*x*(*t*) *y*(*t*)

+

+

filtre*x*ˆ(*t*) *H*

Le **filtre optimal** minimise **la variance de l’erreur** entre la variable réelle et son estimation

~

~ ( )

[ ( )]

*T*

*V* E *x t x t*

=

~*x t* = *x t* − *x t* ( ) ( ) ˆ( )

17

II. Cas des signaux continus

Déterminer le filtre continu optimal *H(****p****) *⮚ Hypothèses

*x(t)* et *b(t)*, sont des signaux aléatoires, scalaires, centrés, non corrélés et stationnaires.

⮚ Notations

**Covariance** de deux signaux *x(t)* et *y(t)*:

*R*, ( ) E[*x*(*t* )*y*(*t*)] *xy* ∀τ ∈ φ τ = +τ

**Spectre de covariance** de deux signaux *x(t)* et *y(t)*: ∫+∞

( ) ( ( )) ( )

*S p e dp*

−

τ

*xy* L*b xy xy*

= φ τ = φ τ τ

−∞

***Transformée de Laplace***

***bilatérale***

18

II.1. Transformée de Laplace bilatérale

La transformée de Laplace bilatérale d’une fonction *f* peut être calculée à partir de la transformée de Laplace selon:

(*f* (*t*)) (*f* (*t*)) (*f* (*t*)) *b*=++ −

\*

L L L

( )( )

+=0 00

⎩⎨⎧<≥

avec

*f t*

*f t t t*

( )( )

−=0 00

*f t t*

− ≥

*f t* \*

⎩⎨⎧<

*t*

() = { ()}*p*→− *p*

L . L .

19

II.2. Autovariance

L’**autovariance** d’un signal *x(t):*

( ) E[*x*(*t* )*x*(*t*)] *xx* φ τ = +τ

L’autovariance est une fonction paire

φ (τ ) =φ (−τ ) *xx xx*

Le spectre d’autovariance

( ) (φ (τ )) *Sxx p* = L*b xx*

= (φ (τ ))+ (φ (−τ )) *xx xx*

\*

L L

( ( )) { ( ( ))} *xx xx p*→− *p*

= L φ τ + L φ −τ

*G*( *p*) / *S* (*p*) *G*( *p*) *G*( *p*) ∃ *xx*= + −

20

***fonction paire***

II.3. quation de Wiener-Hopf

Pour pouvoir estimer x(t), on dispose de l’ensemble des mesures sur la sortie *Y*(*t*) = {*y*(*t* −τ ) τ ≥ 0}

D’après le principe d’estimation des v.a., l’estimation linéaire optimale cherchée vérifie le principe d’orthogonalité:

∀τ ≥ 0 E[(*x*(*t*)*-x*ˆ(*t*)) *y*(*t* −τ )]= 0

∀τ ≥ 0 E[*x*(*t*)*y*(*t* −τ )*-x*ˆ(*t*)*y*(*t* −τ )]= 0

∀τ ≥ 0 φ (τ ) = E[*x*ˆ(*t*)*y*(*t* −τ )] *xy*

Le filtre *H(p)* étant causal, sa reponse impulsionnelle est nulle pour *t<*0 

∫+∞

( ) ( ) ( )

*x*ˆ*t h* ν *y t* ν *d*ν

= −

0

( ) ( ) ( )⎥⎦⎤

⎢⎣⎡

∀ ≥ = − − ∫+∞

τ 0 φ*xy* τ E *h* ν *y t* ν *y*(*t* τ )*d*ν

0

τ φ*x y* (τ ) *h*(ν )φ*y y* (τ ν )*d*ν ∫+∞

0Équation de Wiener-Hopf

∀ ≥ = − 0

***(Éq. A)*** (*t* −ν )−(*t* −τ )

21

II.3.1. Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

⮚ Remarque

Si *f(t) est une fonction* ***bornée*** *tel que* (*f* (*t*)) L*b*

*f* (*t*) = 0 *t* ≥ 0

alors ne présente pas de pôle à partie réelle négative En effet,

En effet,

() = { ()}*p*→− *p* \*

(*f* (*t*)) (*f* (*t*)) (*f* (*t*)) *b*=++ −

\*

L L L

L . L .

**0**

{ ( ( ) ) }*p p*

= L

*f t*

− →−

ne présente pas de

pôle à partie réelle

**positive**

ne présente pas de pôle à partie réelle **négative** 22

II.3.1. Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

⮚ Fonction rationnelle paire

Si *F(p) est une* fonction rationnelle paire

alors

✔*F*(*p*) = *F*(− *p*)

✔ si *p1* est un pôle de *F* alors *–p1*l’est aussi

✔ *si z1 est un zéros de F alors –z1l’est aussi*

23

II.3.1. Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

⮚ Factorisation

Soit une fonction rationnelle *F(p)*. *F(p)* peut être factorisée sous la forme: *F*(*p*) *F* (*p*)*F* (*p*)

=

+ −

avec

( ) et ( ( )) stables + + −1

*F p F p*

( ) et ( ( )) instables − − −1 *F p F p*

Si de plus *F(p)* est une fonction rationnelle paire *F* (*p*) = *F* (− *p*)

alors

et on obtient

− +

*F*(*p*) = *F* (*p*)*F* (− *p*) + +

***(Éq. B)***

avec tous les zéros et pôles de *F+(p)* dans le demi plan complexe gauche 24

II.3.1. Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

⮚ Factorisation – exemple 1

2 1

*p*

−

Soit la fonction rationnelle( )2

*F p*

*F* (*p*) *F* (*p*)

+ − Calculer et

=*p p*

2− −

2 1

1

( )1

*p*

−

*F p* ( )2

+

*p*

=

+

−

*F p*

=

*p*

−

⮚ Factorisation – exemple 2

1

Soit la fonction rationnelle( )1

*F p*

*F* (*p*) *F* (*p*)

+ − Calculer et

( ) =1

=*p*

−

1

*F p* ( )1

+

−

*F p*

=

*p*

−

25

II.3.1. Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

⮚ Décomposition

Soit une fonction rationnelle *F(p)*. F(p) peut être écrite, par décomposition en éléments simples, sous la forme:

*F*(*p*) *F* (*p*) *F* (*p*) = −+ +

avec

*F* (*p*) stables + *F* (*p*) instables −

!

Attention à la notation *F* (*p*) *F* (*p*)

+≠

+

*F* (*p*) *F* (*p*)

−≠

−

26

II.3.1. Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

⮚ Décomposition – exemple 1

2 1

*p*

−

Soit la fonction rationnelle( )2

*F p*

*F* (*p*) *F* (*p*) + −

Calculer et

1

=*p p* 2− −

1

*F p* ( )2

( )1

*F p*

+=*p*

+

−=*p*

−

⮚ Décomposition– exemple 2

1

Soit la fonction rationnelle( )2

*F p*

*F* (*p*) *F* (*p*) + −

Calculer et

=*p*

−

1

*F*+(*p*) = 0 ( )2 *F p*

− =*p*

−

27

II.3.1. Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

❖ Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

Soit la fonction *f(t)* définie par:

( ) ( ) ( )⎥⎦⎤

⎢⎣⎡

= − − ∫+∞

*f t* φ *t h* τ φ *t* τ *d*τ *xy yy* 0

( )

***(\*)***

Compte tenu de l’équation de Wiener-Hopf (eq. A) L*b*

τ φ*x y* (τ ) *h*(ν )φ*y y* (τ ν )*d*ν ∫+∞

∀ ≥ = −

0

0

*f(t)* doit être nulle pour tout *t* positif ou nul.

*En appliquant la transformée de Laplace Bilatérale sur* ***(\*)****,*

*il vient :*

*F p S* (*p*) *H*(*p*)*S* (*p*) =*x y* − *y y* ( )

*f(t)* étant bornée les pôles de *F(p)* n’appartiennent pas au demi plan complexe gauche.

28

II.3.1. Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

*F p S* (*p*) *H*(*p*)*S* (*p*) =*x y* − *y y* ( )

D’autre part, comme *Syy* est une fonction paire, on peut écrire selon (eq. B) :

*S* (*p*) *S* (*p*)*S* ( *p*) *y y*=*y y y y* −

+ +

où *S+yy* a tous ses zéros dans le demi plan complexe gauche. Ainsi *U(p)*, définie par:

( )( )( )

=( ) *F p*

*S p*

*x y*

( )*H*(*p*)*S* (*p*) +

*U p y y* + +−

*S p* −

=

*S p*

*y y*

*y y*

−

doit avoir tous ses pôles dans le demi plan complexe droit.

29

II.3.1. Résolution de l’équation de Wiener-Hopf

( )

*S p*

*xy*

Si on décompose sous la forme:

*S* ( *p*)

( )

( )

+

*yy*

−

( )

+ +⎥⎥⎦⎤

*S p xy*

=

⎢⎢⎣⎡−

*S p*

*xy*

⎥⎥⎦⎤

+

⎢⎢⎣⎡−

*S p*

*xy*

( )

*S p*

( )

+

( )+

− *S p*

*S p*

*yy*

*yy*

−

*yy*

Le fait que *H(p)* soit stable conduit à écrire il existe un polynôme *P(p)* tel que:

⎢⎢⎣⎡+

( )( )⎥⎥⎦⎤

( )( )( )

*H p*

=

1

⎢⎢⎣⎡−

*S p*

*xy*

⎥⎥⎦⎤

+ +*P p*

*S p yy*

*S p yy*

+

Comme le filtre *H(p)* doit être réalisable et stable, on doit avoir *P(p)Ξ0.* On peut en déduire :

( )( )( )

+ +⎥⎥⎦⎤

⎢⎢⎣⎡−

*S p*

1**Filtre de Wiener**

*H p*

*xy*

=*S p*

*S p yy*

*yy*

( )+

30

II.4. Exemple

Soit :( ) ( ) ( ) += *tbtxty*

1

où *x(t)* est un message de spectre d’autovariance :( ) 2 =

*xx pS*−

1

*p*

et *b(t)* un bruit blanc de spectre *Sbb=b2*, indépendant de *x(t)* Déterminer le filtre de Wiener optimal estimant *x(t)*

( )

1*b*

( ) 2 *yy pS* +

*pS xy*

=

1

=

1

−

*p*

( ) *pS* ( )( *bp bp*)

+ 2

2

11

*yy*

1

−++

( )

⎢⎢⎣⎡+

( ) 2 *xy pS*− =

*pS xy*

⎥⎥⎦⎤

=

1

1

( ) *pS* ( )( *bbp* )

*p*

+ 2

11

*yy*

+++ 1

12

*yy pS*+++ *b bp*

( ) ( )( *bbb bp*) *pH*++++

+

( )*p*

=2 2

=

1

1 1

31

Exercice 2

Considérons le système stochastique continu suivant : ( ) ( ) ( ) ( )

*x t a x t bu t w t*

*a,b=ctes*

avec :

= + + *y t x t v t*

( ) ( ) ( )

= +

*w(t)* et *v(t)* sont deux bruits blancs gaussiens indépendants de variance 1. *w(t)* et *v(t)* sont indépendants de l’état*.*

Le spectre de covariance des signaux *x(t)* et *v(t)* sont :

1; 1

( ) ( ) 2

*S p S p*

= =

25 *xx vv*

−

*p*

Déterminer l’estimé de l’état *x(t)* en minimisant la variance de l’erreur.

32

II.5. quation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets On procède comme dans le cas continu

On considère qu’on dispose de l’ensemble des mesures scalaires,

centrées et stationnaires

{*xi*} et {*yi*}

La covariance de deux signaux *x* et *y* échantillonnés

(*j*) [*x(i j)y(i)*] φ*xy*= E +

L’équation de Winer-Hopf discrète du filtre optimal discret H, s’écrit :( ) ∑ ( )

∞

∀ ∈ = −

*j* N, *j h j i* φ*x y i*φ *y y*

i 0

=

avec *hi*la réponse impulsionnelle du filtre

33

II.5.1. Résolution de l’équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

De même que dans le cas continu, la résolution utilise la **transformée en *z* bilatérale** d’une suite

{ } ∑+∞

= =*i*

{*fi*,*i*∈ *N*}

−

*F*(*z*) Z *f f z*

*b i i*

−∞

qui se calcule à partir de la transformé en *z* (monolatérale) par : { } { } { } 0

+ \* −

Z Z Z

*b i*=*i*+ *i*−

*f f f f*

avec

*i*⎩⎨⎧≥< 0 pour 0

*f*

+

=

⎩⎨⎧≥<

0 pour 0 *i*

*i*

−

*f*

=

*i*

*f i*

*f i* pour 0

pour 0

−

*i*

*i*

{.}= [ {.}]→ −1 Z Z*z z*

\*

34

II.5.1. Résolution de l’équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

Le **spectre de covariance** est, par définition, la transformée en z bilatérale de la fonction de covariance:

*Sxy* (*z*) = Z*b*{φ*xy* (*j*)}

Pour une fonction d’autovariance on a :

*j N* (*j*) ( *j*) ∀ ∈ ,φ*xx*=φ*xx* −

Le spectre d’autovariance s’écrit alors :

( ), ( ) ( ) ( ) (0)

−

1

*xx xx* ∃*G z S z* = *G z* +*G z* −φ

conduisant à la propriété :

( ) ( )−1

*S z* = *S z xx xx****(Éq. C)***

35

II.5.1. Résolution de l’équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

On utilise de même les notions de factorisation et de décompositions de fractions rationnelles en *z*

*F*(*z*) *F* (*z*)*F* (*z*)

⮚ Factorisation

=

+ −

où

*F* (*z*)

+a tous ses zéros et pôles à l’intérieur du cercle unité *F* (*z*)a tous ses zéros et pôles à l’extérieur du cercle unité

−

D’où on peut écrire le spectre d’autovariance *(Éq. B)* sous la forme : ( ) ( ) ( )

+ + −1

*S z* = *S z S z xx xx xx*

car ( ) ( )

− + −1

*S z* = *S z xx xx*

avec *S* (*z*) *xx*+a tous ses zéros et pôles à l’intérieur du cercle 36

unité

II.5.1. Résolution de l’équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

⮚ Décomposition

*F*(*z*) = *F*+(*z*)+ *F*−(*z*)− *f* 0

où

*F* (*z*) +a tous ses pôles à l’intérieur du cercle unité *F* (*z*)a tous ses pôles à l’extérieur du cercle unité −

⮚ Résolution

La même démonstration que dans le cas des signaux continus conduit à exprimer la fonction du transfert du filtre optimal pour les signaux

discrets par :

( )( )( ) + + −⎥⎥⎦⎤

*H z*

1

⎢⎢⎣⎡

*S z xy*

**Filtre de Wiener**

=1

*S z yy*

( )+

*S z*

*yy*

37

Chapitre 4

Filtrage de Kalman

Introduction

Le filtre de Kalman est une **reconstitution d’état** dans un **environnement stochastique** minimisant la **variance de l’erreur d’estimation**

Les algorithmes donnant la solution à ce problème ont été déterminés initialement par

▪ Kalman en 1960 pour la cas discret

▪ Kalman et Bucy en 1961 pour le cas continu

39

Chapitre 4

Filtrage de Kalman Filtre de Kalman Discret

Hypothèses

Soit le système linéaire stochastique modélisé par l’équation d’état :

bruit d’entrée (de dynamique)

état entrée

*x A x B u G w*

= + +

. . .

*k k k k k k k*

+

1

*y C x v* = +

.

*k k k k* + + + + 1 1 1 1

bruit de mesure

Ce modèle peut être considéré comme représentatif d’un système à temps discret ou plus généralement être obtenu à partir de la discrétisation d’un modèle représentatif d’un système à temps

continu.

41

Hypothèses

bruit d’entrée (de dynamique)

étatentrée

*x A x B u G w* = + +

. . .

*k k k k k k k*

+

1

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

{ }entrée déterministe

*uk*

bruit de mesure

{ } { }des séquences indépendantes de bruit blancs centrés

*w* et *v*

*k k*

*x*, l’état initial, une variable aléatoire indépendante de {*wk*} et {*vk*} 0

E[*wk*] = 0

*v*

⎢⎢⎢⎣⎡⎥⎥⎥⎦⎤

⎥⎥⎥⎦⎤

*R*

*k k l* δ

0 0

⎢⎢⎢⎣⎡0

*k*

E[*vk*] = 0

~

[ ]

⎢⎢⎢⎣⎡

*k k l*

⎥⎥⎥⎦⎤

E

*w*

*T*

*T T*

*v w x*

=

0 0

~

*k l*

*l*

0

*Q*

δ

[ ] E 0 0 *x* = *x*

*x*

00 0 *P*

~*x* = *x* − *x RkQkP*0 matrices symétriques définies positives 42

0 0 0

Notations

*x* /

ˆmeilleure estimation de à l’instant *k* fonction des

*k j*

observations

*x*

{*y*0, *y*1,, *y j*}

~= −

*x x x* / /

ˆ

*k j k k j* ~= −

*y y C x* / /

ˆ

*k j k k k j*

( ) { }*T*

cov *z* = E *zz* ~

( ) *k t k t P x* / / = cov

43

Filtrage Lissage Prédiction *x* /

ˆmeilleure estimation de à l’instant *k* fonction des

*k j*

observations

*x*

{*y*0, *y*1,, *y j*}

Selon la valeur de *k* par rapport à *j x* /

ˆest une valeur filtrée si *k=j k j*

*x* /

ˆest une valeur prédite si *k> jk j*

*x* /

ˆest une valeur lissée si *k< j k j*

44

quations du filtre de Kalman

Les équations de fonctionnement du filtre de Kalman se décomposent en 2 étapes: 

⮚ Étape de prédiction :

*x*ˆ+1/= *A x*ˆ/+

*k k k k k Bkuk*

*T*

*T*

*Pk*+1/ *k*= *AkPk* / *k Ak*+*G Q G*

*k k k*

⮚ Étape de correction :

( ) / / 1 / 1

*x x K y C x*

*k k*= *k k*−+ *k k*− *k k k*−

ˆ ˆ ˆ

( ) *k* / *k*= − *KkCkPk* / *k*−1

*P I*

où *Kk* est le gain optimal du filtre donné par :

*T T K P C R C P C k k k k k k k k k*−

( )1

= + − −

/ 1 / 1

45

quations du filtre de Kalman

Les équations du filtre de Kalman sont obtenues en calculant

[ ] E *k*+1 *x*

+=+ − + + − +*T*

⎢⎣⎡

( [ ])( [ ])⎥⎦⎤

*k k k k k P x x x x* 1 E 1 E 1 1 E 1 [ ] *k /k k /k x x* 1 E 1

ˆ+=+

+=+ − + + − +*T*

⎢⎣⎡

( )( )⎥⎦⎤

*k k k k k k k k P x x x x* 1/ 1 1/ 1 1/ E ˆ ˆ *x*

ˆ*k*+ */k*+

1 1

⎢⎣⎡

( )( )⎥⎦⎤

+ +=+− + + +− + +*T* E ˆ ˆ

*P x x x x* 1/ 1 1 1/ 1 1 1/ 1 *k k k k k k k k*

46

quations du filtre de Kalman

*x A x B u G w*

= + +

. . .

*k k k k k k k*

+

1

[ ] E *k*+1 *x*

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

?

déterministe

[ ] [ ] [ ] *k k k Bkuk Gk wk* E *x* +1= *A* .E *x* + . + .E

0

[ ] [ ] *k k kBkuk*

E *x A* .E *x* .

+1= +

47

*Pk*+1?

quations du filtre de Kalman

*x A x B u G w*

= + +

. . .

*k k k k k k k*

+

1

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

+=+ − + + − +*T*

⎢⎣⎡

( [ ])( [ ])⎥⎦⎤

*k k k k k P x x x x* 1 E 1 E 1 1 E 1

+= + + − + + + − +*T* ⎢⎣⎡

( [ ])( [ ])⎥⎦⎤

*k k k k k k k k k k k k k k k P A x B u G w x A x B u G w x* 1 1 E 1 E . . . E . . . += + +*T*

⎢⎣⎡

( )( )⎥⎦⎤

~ E .

~ . .

*k k k k k k k Gk wk P A x G w A x* . 1

*T*

*T*

*Pk*+1= *AkPkAk*+*G QG*

*k k*

48

[ ]? E *k*+1

*y*

quations du filtre de Kalman

*x A x B u G w*

= + +

. . .

*k k k k k k k*

+

1

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

[ ] [ ] E *k*+1= E *k*+1 *k*+1+ *k*+1

*y C x v*

[ ] [ ] E *k*+1= *k*+1E *k*+1

*y C x*

~

( )1

cov *k*+

*y*?

+=+ − + + − +*T* ( ) ( [ ])( [ ])⎥⎦⎤

~ cov

⎢⎣⎡

*y y y y y* 1 E 1 E 1 1 E 1

*k k k k k*

⎡ ⎤ = + − + − ⎢ ⎥ ⎣ ⎦ cov E . E . E ( 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ) ( [ ])( [ ])*T*

*k k k k k k k k k k k y C x v C x C x v C x* + + + + + + + + + + + +=+ + + + + + + +*T*

( ) ( )( )⎥⎦⎤

~ cov

⎢⎣⎡

~ E .

~.

*y C x v C x v* 1 1 1 1 1 1 1

*k k k k k k k*

cov( 1 1 1 1 )*T*

*k k k k y C P C R* + + + + = +

49

quations du filtre de Kalman

*x A x B u G w*

= + +

La connaissance de toutes les valeurs du signal jusqu’à l’instant *k* se résume à une *k/k x*ˆ

estimation de la valeur de son état à l’instant k, établie à l’aide de toutes les valeurs de la sortie *y* mesurées jusqu’à l’instant *k*.

*x*ˆ*k*+1*/k*?

*k /k x* 1

ˆ+l’estimation de*k*+1

*x*

[ ] *k /k k k k*

*x x x* 1 1 /

ˆ E ˆ

+=+

[ ] *k /k k k k Bkuk Gk wk x*ˆ E *A* .*x* . .

+1= /+ +

[ ] *k /k k k k Bkuk*

*x*ˆ E *A* .*x* .

+1= /+

*x*ˆ *A x*ˆ.

*k /k k k k Bkuk*

+1= /+

. . .

*k k k k k k k* +

1

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

50

*Pk*+1*/k*?

quations du filtre de Kalman

*x A x B u G w*

= + +

erreur de prédiction ~

. . .

*k k k k k k k* +

1

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

( ) *k /k k k*

*P x* 1 1/

+= cov +

~+=+ +

*k /k k k /k x x x* 1 1 1

- ˆ

~+= + + + *k /k k k k k k k k /k x A x B u G w x* 1 1

. . . - ˆ

ˆ

*k /k k k k k k k k k k k k x A x B u G w A x B u* += + + −

1 / . . . - . ~+1= /+

~.

*x A x* .

*k /k k k k Gk wk*

~ E .

~

[( )( ) ]*T k /k k k k k k k k k Gk wk P A x G w A x* . +1 = / + / +

. .

*T*

*T*

*Pk*+1*/k* = *AkPk/kAk* +*G QG*

*k k*

51

*k /k x* 1 ˆ+

quations du filtre de Kalman

*x A x B u G w*

= + +

La prédiction peut être corrigée en *y*

tenant compte de la nouvelle mesure ,

*k*+1

à l’aide d’une correction linéaire.

( ) *k /k k /k k k k k /k x x K y C x* 1 1 1 1 1 1 1 + +=++ + +− + + ˆ ˆ ˆ

. . .

*k k k k k k k* +

1

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

gain

innovation

~*k*+ */k*+= *k*+− *k*+ */k*+

*x x x*

ˆ

1 1 1 1 1

~+ +=+− +− + +− + +

( ) *k /k k k /k k k k k /k x x x K y C x* 1 1 1 1 1 1 1 1

ˆ ˆ

~*k*+ */k*+= *k*+− − *k*+ *k*+ *k*+ *k*− *k*+ *k*+

( ) 1 1 1 1 1 1/ 1 1

*x x I K C x K y*

ˆ

~*k*+ */k*+= *k*+− − *k*+ *k*+ *k*+ */k* − *k*+ *k*+ *k*+− *k*+ *k*+ ( ) 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 *x x I K C x K C x K v*

ˆ.

~*k*+ */k*+= − *k*+ *k*+ *k*+− *k*+ */k* − *k*+ *k*+

( )( ) 1 1 1 1 1 1 1 1

*x I K C x x K v*

ˆ

~ ~

( )( ) 1 1 1 1 1/ 1 1

*x I K C x K v*

*k*+ */k*+= − *k*+ *k*+ *k*+ *k*− *k*+ *k*+

( ) ( )*T*

*T*

*Pk*+1*/k*+1= *I* −*Kk*+1*Ck*+1*Pk*+1/ *kI* −*Kk*+1*Ck*+1+ *K* +1*R* +1*K* +1

52

*k k k*

quations du filtre de Kalman

*x A x B u G w*

= + +

Le gain *K* est calculé pour que l’erreur d’estimation soit statistiquement orthogonale à l’innovation (nouvelle information apportée au filtre) :

~ E +1 +1 +1− +1 +1= [ ( ˆ ) ] 0

. . .

*k k k k k k k* +

1

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

*T*

*k /k k k k /k x y C x*

~ ~ E − +1 +1 +1/ − +1 +1 +1 +1 + +1 = [(( )( ) )( ) ] 0

*T*

*I K C x K v C x v k k k k k k k k /k k*

~ ~ E − +1 +1 +1/ +1/ +1 − +1 +1 +1 = [(( ) )] [ ] 0

*T*

*T*

*T*

*I K C x x C E K v v*

*k k k k k k k*

*k k k*

~ E +1/ +1 =

car[ ] 0

*T*

*k k k x v*

( ) 0 *I* − *K* +1*C* +1 *P* +1/ *C* +1 − *Kk*+1*R* =

*T*

*k k k k k*

( )1

*T*

*T*

−

*K* += *P* + *C* + *C* + *P* + *C* + + *R k k k k*

1 1/ 1 1 1/ 1 *k k k k*

53

Modélisation du Filtre de Kalman *wk vk+1*

***Phénomène physique***

*G*

*uk xk+1*

*B*

*xk+1*

*+ C +*

*yk+1*

*A*

*xk*

*z-1*

***Filtre de Kalman***

ˆ+

*x* 1/

*B*

*+ -C + Kk+1 k k*

ˆ*k*+ *k*+

*x*

*+*

ˆ

*x* /

*k k*

*A z-1*

1/ 1

54

Soit le système décrit par :

Exemple 1 = =101

*x*

0*m*0

⎢⎣⎡

⎥⎦⎤

*y*0=1.2

⎪⎨⎧



⎢⎣⎡

0 1

⎥⎦⎤

⎢⎣⎡

1 0

⎥⎦⎤

*y*1= 2

*x x*

=

⎪⎩

.

0 0

[ ]

*P*0

=0 5

*y x v* = + 1 0 .

E[ ]=1

= 0.1 seconde *Te*

*v v*

*T*

*k k*

Déterminer une estimation de l’état aux instants 0 et 1 0/ 0 *x*ˆ1/1

et*x*ˆ

55

Chapitre 4

Filtrage de Kalman Filtre de Kalman Continu

Filtre de Kalman continu

Le filtre de Kalman à temps continu est souvent appelé filtre de Kalman-Bucy. Il résout le problème de l’estimation de l’état d’un système continu défini par les équations d’états:

*x t A t x t B t u t G t w t*

 = + +

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

*y t C t x t v t*

( ) ( ) ( ) ( )

= +

On suppose que ses bruits sont blancs, gaussiens, et connus par leurs matrices de covariance :

⎡ ⎤ = ⎣ ⎦

*T*

E ( ) '

*w(t)w (t') Q t* δ*t t* −

⎡ ⎤ *v(t)x ( )* = ⎣ ⎦

E 0 0 *T* ⎡ ⎤ *v(t)w (t')* = ⎣ ⎦

⎡ ⎤ = ⎣ ⎦ E 0 *T*

*T*

E ( ) '

*t t v(t)v (t') R t* δ −

⎡ ⎤ *w(t)x ( )* =

⎡ ⎤ *x( )x ( ) P* = ⎣ ⎦

E 0 0 *T*

E 0 0 0⎣ ⎦ *T*

Où l’impulsion de Dirac en *t*, et en considérant *x(0)*

δ *t*

~*x( )* = *x* − *m*

comme une variable aléatoire d’espérance *m0*,

0 (0)

0

57

Filtre de Kalman continu

Les équations du filtre de Kalman discret peuvent être appliquées aux systèmes continus après échantillonnage. Le filtre continu est obtenu par passage à la limite (faire tendre la période d’échantillonnage vers 0)

⮚ Étape 1 : discrétisation du modèle avec une période d’échantillonnage constante par la méthode d’Euler

⮚ Étape 2 : passage à la limite en faisant tendre la période d’échantillonnage vers 0

58

Filtre de Kalman continu

Soit Δ la période de discrétisation :

Δ =*n*− *n*−1

*t t*

Posons:

δimpulsion de Dirac lim *i j*

*ij* δ

=

Δ( )

− Δ

Δ→

0

lim0 Δ→

lim0Δ→

( ) *k k Q* Δ = *Q t*

( ) *k k R* Δ = *R t*

59

Filtre de Kalman continu

⮚ Discrétisation du modèle

modèle continu

*x t A t x t B t u t G t w t*

 = + +

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

*y t C t x t v t*

( ) ( ) ( ) ( )

= +

Lorsque Δ tend vers 0

*x x*



*x*1

−

Approximation d’Euler

→ *k*+ *k*

Δ

Le modèle continu est équivalent à :

( )

*x I A x B u G w*

= + Δ + Δ + Δ

. .

*k k k k k k k*

+

1

*y C x v* = +

.

*k k k k* + + + + 1 1 1 1

60

Filtre de Kalman continu

⮚ Application du filtre de Kalman

( )

*x I A x B u G w*

= + Δ + Δ + Δ

. .

*k k k k k k k*

+

1

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

L’utilisation du filtre de Kalman prédicateur à 1 pas sur ce système donne:

( )( ) ( ) *k k k k k k k k k k k k* ˆ ˆ

*x* = *I* + *A* Δ *I* −*K C x* +Δ*B u* + *I* + *A* Δ *K y* +1/ / −1 ( ) ( ) ( ) / 1 / 1

ˆ ˆ

= + *k*Δ *k k*−+Δ *k k*+ + *k*Δ *k k*− *k k k*− *I A x B u I A K y C x*

ce qui peut s’écrire sous la forme

61

ˆ ˆ *x x* −

Filtre de Kalman continu

*K*

( ) ( ) / 1 / 1

1/ / 1ˆ ˆ *k k k ky C x* + −− = + + + Δ

*A x B u I A*

*k*

*k k k k k k*

− −

Δ

En considérant :

ˆ ˆ

*x x k k k k* ˆ

Δ

*k k k k*

+− −

lim = 1/ / 1

*x*(*t*)

Δ→

0

Δ

lim0

*Kk*=

*K*(*t*)

Δ→ Δ

*x x*(*t*) *k k*

ˆ ˆ

lim −=

Δ→

0

/ 1

On obtient alors l’équation de l’estimateur :



*x*(*t*) *A*(*t*)*x*(*t*) *B*(*t*)*u*(*t*) (*I A* )*K*(*t*)(*y*(*t*) *C*(*t*)*x*(*t*)) *k*

ˆ=ˆ+ + + Δ − ˆ

0



*x*ˆ(*t*) = *A*(*t*)*x*ˆ(*t*)+ *B*(*t*)*u*(*t*)+ *K*(*t*)(*y*(*t*)−*C*(*t*)*x*ˆ(*t*))

62

Filtre de Kalman continu

⮚ Remarques

Le gain de Kalman est déterminé également par passage à la

limite à partir des équations discrètes.

*Kk*

( )Δ

*K t*lim0

=

Δ→

( )

−

1

*T*

*T*

*Pk kCkR C P C*

+

/ 1 / 1

− −

=

lim

*k k k k k*

Δ→

Δ

0

( )1

lim−

*T*

*T*

= Δ + Δ *Pk kCkR C P C*0

/ 1 / 1

− −

Δ→

*k k k k k*

0

*P C R* (*t*)

=

lim −

*T*

1

*k k k*

/ 1

Δ→

0

−

*P P*(*t*) *k k*−=

En posant , le gain optimal est :

lim

Δ→/ 1

0

*K*(*t*) *P*(*t*)*C* (*t*)*R* (*t*)

=

*T* −1

63

Filtre de Kalman continu

⮚ Remarque

( ) *k* / *k*= − *KkCkPk* / *k*−1

*P I*

= *Pk* / *k*−1− *KkCkPk* / *k*−1

*K*

= / −1− *k k* / *k*−1

*P*

*k kC P*

*k*

Δ

Δ

lim *k k* lim *k k* lim*CkPk k* = − ( ) −Δ *P P K t*

/

Δ→ Δ→ 0

0

/ 1

−

Δ→

/ 1

0

0

lim lim

*P P P*(*t*) *k k*= *k k*−=

/

Δ→ Δ→ 0

/ 1

0

64

Filtre de Kalman continu

⮚ Équation de Riccati

L’équation de Riccati pour le système discret équivalent : ( )

*x I A x B u G w*

= + Δ + Δ + Δ

. .

*k k k k k k k*

+

1

*y C x v*

= +

.

*k k k k*

+ + + +

1 1 1 1

s’écrit :( ) ( )

( ) ( )

*T*

*T*

*T*

*T*

*P I A P I A G Q G P I A P I A G Q G*

= + Δ + Δ + Δ Δ

= + Δ + Δ + Δ Δ *k k k k k k*

*k k k k k k*

+ −

+ −

1/ / 1

1/ / 1

*k k k k k k*

( ) ( ) ( )*T* ( ) ( ) ( )*T* −

*T T*

*T T*

−

1 1

− + Δ + + Δ − + Δ + + Δ *I A P C R C P C C P I A*

*I A P C R C P C C P I A k k k k*

*k k k k*

/ 1 / 1

/ 1 / 1

− −

− −

*k k k k k*

*P P* −

*Q*(*t*) *T*

*k k k k k T*

*k k k k k k k k* / 1

/ 1

−

−

*k k k k* + − 1/ / 1

= Δ + + *G Q G A P P A*

Δ

*k k k*

*k k k k k k* / 1 / 1

− −

( ) ( ) ( )

*T*

*T*

−

1

*T*

− + Δ Δ + Δ + Δ

*I A P C R C P C C P I A k k k k*

/ 1 / 1

− −

*k k k k k*

*k k k k* / 1

−

Équation de Riccati 0 0 0

+Δ

*A P A*

*T*

*R*(*t*)

*k k k k*

/ 1

−

= + + −

*P*(*t*) *G*(*t*)*Q*(*t*)*G* (*t*) *A*(*t*)*P*(*t*) *P*(*t*)*A* (*t*) *P*(*t*)*C* (*t*)*R* (*t*)*C*(*t*)*P*(*t*) *T T T* −1

Filtre de Kalman continu

⮚ Conclusion

Le filtre de Kalman d’un système à temps continu stochastique est définie par :

*x t A t x t B t u t K t y t C t x t* ˆ ˆ ˆ ( ) = + + − ( ) ( ) ( ) ( ) ( )( ( ) ( ) ( )) avec ( ) 0 0

*x*ˆ= *m*

*K(t)* le gain de Kalman

*K*(*t*) *P*(*t*)*C* (*t*)*R* (*t*)

=

*T* −1

et *P(t)* solution de l’équation de Ricatti

*P t G t Q t G t A t P t P t A t P t C t R t C t P t* − = + + −

*T T T* 1

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) *P* 0 = *P*0

66

Exemple

Soit :

1

*x t x t w t*

 = − + ( ) 2 ( ) ( )

( )2 *Sxx p*−

=

4

*p*

*y t x t v t*

( ) ( ) ( )

= +

*Svv* ( *p*) =1

où *w(t)* et *v(t)* sont 2 bruits blancs gaussiens, centrés et indépendants *w(t)* est indépendant de l’état initial

*v(t)* est indépendant de l’état

[ ] [ ] E E 1\**t t*'

*T T*

*w(t)w (t') v(t)v (t')* = = δ −

Déterminer l’estimation de *x(t)* par deux méthodes (Wiener et de Kalman)

Comparer les deux filtres

67

Chapitre 5

Applications du filtrage de Kalman

*Commande Optimale des systèmes linéaires à*

*critère quadratique évoluant dans un*

*environnement stochastique*

Introduction

L’estimation statistique de l’état d’un système est généralement effectuée dans le but de réaliser une commande par retour d’état.

Dans *un cadre déterministe*, la notion de régulateur - observateur permet de générer une commande à partir de l’état reconstruit.

Dans *un cadre stochastique*, la commande optimale d’un système stochastique est obtenue en construisant la commande optimale obtenue sur le système déterministe associé à l’aide de l’état estimé à partir d’un filtre de Kalman

69

Commande Optimale

Soit le système continu défini par les équations d’états: *x t A t x t B t u t G t w t*

 = + +

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

*y t C t x t v t*

( ) ( ) ( ) ( )

= +

On suppose que ses bruits sont blancs, gaussiens, et connus par leurs matrices de covariance :

[ ] ' E ( )*t t*

*T w(t)w (t') Q t* = δ − [ ] ' E ( )*t t*

~

[ ] 0

*T*

E *v(t)x (t*0*)* =

*v(t)v (t') R t* = δ − E[*v(t)w (t')*]= 0

*T*

~ ~

[ ] 0 0 0

*T*

E *t*

*x(t )x (t )* = Δ δ *t*

*T*

~

[ ] 0

*T*

E *w(t*0*)x (t*0*)* =

Où l’impulsion de Dirac en *t*, et en considérant *x(0)* ~*x( )* = *x* − *m*

comme une variable aléatoire d’espérance *m0*,

0 (0)

0

70

Commande Optimale

Le problème d’optimisation stochastique consiste à chercher la commande optimale minimisant le critère :

= { ( ) ( )+ ∫( ) ( ) ( )+ ( ) ( ) ( ) }

*T*

*t*

*T T f*

*J x t S x t x t M t x t u t N t u t dt*

E

*f t f*

*t*

*f*

0

Dans le cas d’un système où ***l’état est complètement accessible***, la commande optimale a la forme usuelle : 

*u* (*t*) *N* (*t*)*B* (*t*)*P*(*t*)*x*(*t*)

\*− = −

1 *T*

où *P*(*t*) est solution de l’équation de Riccati :

= − − − +

*P*(*t*) *A* (*t*)*P*(*t*) *P*(*t*)*A*(*t*) *M*(*t*) *P*(*t*)*B*(*t*)*N* (*t*)*B* (*t*)*P*(*t*) *T* −1 *T*

*P*(*tf*)=*Stf.*

71

Commande Optimale

Dans le cas où ***seule la sortie est accessible*** (systèmes à état non 

complètement accessible), la commande optimale s’écrit sous la forme : −1 *T*

*u*(*t*) *N* (*t*)*B* (*t*)*P*(*t*)*x*(*t*)

= −

où *P*(*t*) est solution de l’équation de Riccati :

= − − − +*P*(*tf*)=*Stf.* ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ),

*T* − *T*

1

*P t A t P t P t A t M t P t B t N t B t P t* 

et est l’estimation optimale de *x*(*t*) obtenue à l’aide du filtre de

*x*(*t*)

Kalman continu :



*x*ˆ(*t*) = *A*(*t*)*x*ˆ(*t*)+ *B*(*t*)*u*(*t*)+ *K*(*t*)(*y*(*t*)−*C*(*t*)*x*ˆ(*t*))

*K*(*t*) (*t*)*C* (*t*)*R* (*t*)

= Δ

*T* −1

avec Δ(*t*)solution de l’équation de Ricatti



(*t*) *G*(*t*)*Q*(*t*)*G* (*t*) *A*(*t*) (*t*) (*t*)*A* (*t*) (*t*)*C* (*t*)*R* (*t*)*C* (*t*)

*T T T* −1

Δ = + Δ +Δ −Δ Δ ( ) 0 0*t*

Δ *t* = Δ

72

Commande Optimale

Ces différentes relations précédentes constituent le principe de séparation : si la commande et l’observateur sont calculés séparément, mais de façon optimale, alors l’ensemble, réuni dans une structure de commande de type régulateur-observateur, sera également optimal.

Les relations ont été établies dans un cadre continu mais peuvent bien sûr l’être dans un cadre discret.

73

Soit le système :

 = + +

*x t x t u t w t*

( ) ( ) ( ) ( )

*y t x t v t*

( ) ( ) ( )

Exemple

[ ] E 1\**t t*'

*T*

*w(t)w (t')* = δ −

[ ] E 1\**t t*'

*T*

*v(t)v (t')* = δ −

= +

~

~ 0

[ 0 ] 1

*T*

E *x( )x ( )* =

On suppose que toutes les hypothèses pour l’application d’une loi de commande optimale sont vérifiées

Déterminer l’expression de la loi de commande en régime permanant minimisant le critère := {∫( ) }

1

2

*J* E *u t dt*

0

Donner un schéma bloc

*A B C R Q*

= = = = = Δ =

1, 1, 1, 1, 1,01

*S M N*

= = =

0, 0, 1 *tf*

74

Exercice

Considérons le système stochastique continu suivant :

*x t x t u t w t*

( ) 5 ( ) ( ) ( )

= − + +

*y t x t v t*

( ) ( ) ( )

= +

avec : *w(t)* et *v(t)* sont deux bruits blancs gaussiens de variance respectivement Q=1 et R=1.

1. Donner la commande optimale minimisant le critère J.

*J x t u t dt* E 3 2 ⎡ ⎤ = + ⎢ ⎥ ⎣ ⎦ ∫

12 2

0

2. Donner un schéma bloc

( ) ( )